4. 设平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的相关函数为 $R_X(\tau) = Ae^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$，其中 A, a 都是正常数，而 $EX(t)=0$. 试问 $X(t)$ 对数学期望是否有各态历经性？

解：已知 $X(t)$ 为平稳过程，$m_X = EX(t) = 0$

$$\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau\to+\infty} Ae^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$$
$$= \lim_{\tau\to+\infty} \frac{A(1+a|\tau|)}{e^{a|\tau|}}$$
$$= \lim_{\tau\to+\infty} \frac{A(1+a\tau)}{e^{a|\tau|}}$$
$$= 0$$
$$= m_X^2$$

即 $\lim\limits_{\tau\to+\infty} C_X(\tau) = 0$ 则 $\langle X(t)\rangle = m_X$, a.s. $X(t)$ 对数学期望有各态历经性.

10. 设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是平稳过程，且 $EX(t) = 1, R(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|}$. 试求随机变量
$$S = \int_0^1 X(t)\,dt$$
的数学期望和方差.

解：$ES(t) = E\left[\int_0^1 X(t)\,dt\right] = \int_0^1 EX(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$

$DS(t) = ES(t)^2 - [ES(t)]^2$

$$ES(t)^2 = E\int_0^1\int_0^1 X(t_1)X(t_2)\,dt_1dt_2$$
$$= \int_0^1\int_0^1 EX(t_1)X(t_2)\,dt_1dt_2$$
$$= \int_0^1\int_0^1 R_X(t_2-t_1)\,dt_1dt_2$$

$t_1 = s$
$t_2 = \tau + s$

$$|J| = \frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(s,\tau)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\overset{\tau = t_2 - t_1}{\underset{s=t_1}{=\!=\!=}} \int_0^1\int_{-s}^{1-s} R_X(\tau)\,|J|\,ds\,d\tau$$
$$= \int_0^1\int_{-s}^{1-s}(1+e^{-2|\tau|})\,d\tau\,ds$$
$$= \int_0^1\left[\int_{-s}^0 (1+e^{2\tau})\,d\tau + \int_0^{1-s}(1+e^{-2\tau})\,d\tau\right]ds$$
$$= \int_0^1\left(\tau\Big|_{-s}^0 + \frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_{-s}^0 + \tau\Big|_0^{1-s} - \frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_0^{1-s}\right)ds$$
$$= \int_0^1\left(s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2s} + 1 - s - \frac{1}{2}e^{-2(1-s)} + \frac{1}{2}\right)ds$$
$$= \int_0^1\left(2 - \frac{1}{2}e^{-2s} - \frac{1}{2}e^{-2(1-s)}\right)ds$$
$$= 2s\Big|_0^1 + \frac{1}{4}e^{-2s}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}e^{-2(1-s)}\Big|_0^1 = 2 + \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2}$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}$$

$\therefore DS(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}$

14. 已知下列平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数，试分别求出 $X(t)$ 的功率谱密度.

(4) $R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-a|\tau|}(\cos b\tau - ab^{-1}\sin b|\tau|)$，其中 $a>0$.

解：$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2 e^{-a|\tau|}(\cos b\tau - ab^{-1}\sin b|\tau|)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\sigma^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|}\cos b\tau\, e^{-i\omega\tau}d\tau - ab^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|}\sin b|\tau|\, e^{-i\omega\tau}d\tau\right]$$

$$=\sigma^2\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|}(e^{-ib\tau}+e^{ib\tau})e^{-i\omega\tau}d\tau-\frac{ab^{-1}}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|}(e^{ib|\tau|}-e^{-ib|\tau|})e^{-i\omega\tau}d\tau\right]$$

$$=\sigma^2\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-a|\tau|}e^{-(\omega-b)\tau}+e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega+b)\tau})d\tau\right]+\frac{ab^{-1}}{2}\cdot 2\int_{0}^{+\infty}(e^{-a|\tau|}e^{-(\omega-b)\tau}-e^{-a|\tau|}e^{-i(\omega+b)\tau})d\tau$$

$$=\sigma^2\left(\frac{a}{a^2+(\omega-b)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega+b)^2}\right)+\frac{a\sigma^2}{b}\left(\frac{a}{a^2+(\omega-b)^2}-\frac{a}{a^2+(\omega+b)^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{cases} e^{-i\omega\tau}=\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau \\ e^{i\omega\tau}=\cos\omega\tau + i\sin\omega\tau \end{cases}}$$

16. 设随机过程

$$Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Phi),\ -\infty<t<+\infty$$

其中 $X(t)$ 是平稳过程，Φ 为在区间 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，ω_0 为常数，且 $X(t)$ 与 Φ 相互独立. 记 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$，功率谱密度为 $S_X(\omega)$. 试证：

(1) $Y(t)$ 是平稳过程，且它的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos\omega_0\tau$$

(2) $Y(t)$ 的功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=\frac{1}{4}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)]$$

证明：(1) $EY(t)=E[X(t)\cos(w_0t+\Phi)]$

$$\xlongequal{X(t)与\Phi独立} EX(t)\cdot E\cos(w_0t+\Phi)$$

$$=EX(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(w_0t+\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\varphi$$

$$=EX(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\left[\sin(w_0t+\varphi)\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$=0$$

$$R_Y(t,t+\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]=E[X(t)\cos(w_0t+\Phi)X(t+\tau)\cos(w_0(t+\tau)+\Phi)]$$

$$\xlongequal{独立} EX(t)X(t+\tau)\ E\cos(w_0t+\Phi)\cos(w_0(t+\tau)+\Phi)$$

$$=R_X(\tau)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(w_0t+\Phi)\cos(w_0(t+\tau)+\Phi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\varphi$$

$$=R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2w_0t+w_0\tau+2\varphi)+\cos w_0\tau}{2}d\varphi$$

$$=R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2w_0t+w_0\tau+2\varphi)\Big|_0^{2\pi}+\cos w_0\tau\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$=R_X(\tau)\cdot\frac{1}{4\pi}(0+2\pi\cos w_0\tau)$$

$$=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos w_0\tau=R_Y(\tau)\quad 只与\tau相关$$

$\therefore$ $Y(t)$ 是平稳过程且自相关函数为 $R_Y(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos w_0\tau$

(2) $$S_Y(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-iw\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos w_0\tau\, e^{-iw\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\cos w_0\tau(\cos w\tau-i\sin w\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\left[\frac{\cos(w+w_0)\tau+\cos(w-w_0)\tau}{2}-i\frac{\sin(w+w_0)\tau+\sin(w-w_0)\tau}{2}\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{4}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)(\cos(w+w_0)\tau-i\sin(w+w_0)\tau)d\tau+$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)(\cos(w-w_0)\tau-i\sin(w-w_0)\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{4}[S_X(w+w_0)+S_X(w-w_0)]$$

17. 设平稳过程

$$X(t)=a\cos(\Omega t+\Phi)$$

其中 a 是常数，Φ 是在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，Ω 是具有分布密度 $f(x)$ 为偶函数的随机变量，且 Φ 与 Ω 相互独立。试证 $X(t)$ 的功率密度为 $S_X(\omega)=a^2\pi f(\omega)$。

解：$EX(t)=E(a\cos(\Omega t+\Phi))=aE(\cos\Omega t\cos\Phi-\sin\Omega t\sin\Phi)$

$=a(E\cos\Omega t\, E\cos\Phi-E\sin\Omega t\sin\Phi)=0$.

$R_X(\tau)=EX(t)X(t+\tau)=a^2E\cos(\Omega t+\Phi)\cos(\Omega t+\Omega\tau+\Phi)=\frac{a^2}{2}E[\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\Phi)+\cos\Omega\tau]$

$E\cos(2\Omega t+\Omega\tau+2\Phi)=E(\cos(2\Omega t+\Omega\tau)\cos2\Phi-\sin(2\Omega t+\Omega\tau)\sin2\Phi)=0$

$E\cos\Omega\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\tau\cdot f(x)dx=2\int_0^{\infty}\cos x\tau f(x)dx$

$\therefore R_X(\tau)=a^2\int_0^{\infty}\cos x\tau f(x)dx$.

$S_X(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-iw\tau}d\tau=a^2\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_0^{+\infty}\cos x\tau f(x)dx]e^{-iw\tau}d\tau$

$=2a^2\int_0^{+\infty}[\int_0^{+\infty}\cos x\tau f(x)dx]\cos w\tau d\tau=a^2\int_0^{+\infty}[2\int_0^{+\infty}\cos x\tau\cos w\tau d\tau]f(x)dx$

$=a^2\pi[\int_0^{+\infty}\delta(w-x)f(x)dx+\underbrace{\int_0^{+\infty}\delta(w+x)f(x)dx}_{x'=-x}]=a^2\pi(\int_0^{+\infty}\delta(w-x)f(x)dx+\int_{-\infty}^{0}\delta(w-x')f(x')dx)$

$=\int_{-\infty}^{0}\delta(w-x')f(-x')dx'$

$=a^2\pi f(w)$

20. 设 $X(n)(n=0,\pm1,\cdots)$ 是白噪声序列，试证

$$Y(n)=\frac{1}{m}[X(n)+X(n-1)+\cdots+X(n-m+1)]=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}X(n-i)$$

是一个平稳序列，并求它的协方差函数。

证明：$X(n)(n=0,\pm1,\cdots)$ 为白噪声序列 $\therefore EX(n)=0\quad DX(n)=EX^2(n)=\sigma^2$

$EY(n)=E\frac{1}{m}[X(n)+X(n-1)+\cdots+X(n-m+1)]=\frac{1}{m}[EX(n)+EX(n-1)+\cdots+EX(n-m+1)]$

$=\frac{1}{m}(0+0+\cdots+0)=0$

$R_Y(n,n+k)=EY(n)Y(n+k)=E\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}X(n-i)\cdot\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}X(n+k-j)$

$=\frac{1}{m^2}E\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}X(n-i)X(n+k-j)=\frac{(m+k)\sigma^2}{m^2}$

① $n-i\neq n+k-j$ $\quad EX(n-i)X(n+k-j)=0$ $\quad$ 与n无关.

② $n-i=n+k-j$ $\quad EX(n-i)X(n+k-j)=\sigma^2$ 共 $(m+k)$ 项.

故 $Y(n)$ 是一个平稳序列

$C_Y(t,t+\tau)=R_Y(t,t+\tau)-m_Y(t)m_Y(t+\tau)$

$=R_Y(t,t+\tau)-EY(t)EY(t+\tau)$

$=R_Y(t,t+\tau)-0\times0=\frac{(m+k)\sigma^2}{m^2}$

21. 设$\{X(t), t\in T\}$，$\{Y(t), t\in T\}$是相互独立的实平稳过程，$EX(t)=m_X$，$EY(t)=m_Y$，令$Z(t)=X(t)Y(t), t\in T$.

(1) 试证：$Z(t)$是平稳过程，而且$Z(t)$的自相关函数等于$X(t)$与$Y(t)$的自相关函数之积；

(2) 令

$$P(t)=X(t)-m_X$$
$$Q(t)=Y(t)-m_Y$$

如果已知$P(t)$和$Q(t)$的自相关函数分别为

$$R_P(\tau)=e^{-a|\tau|}, a>0$$
$$R_Q(\tau)=e^{-b|\tau|}, b>0$$

试求$Z(t)$的协方差函数.

(1) 证明：$EZ(t)=EX(t)Y(t)$

$\underline{\underline{X(t)与Y(t)独立}}\ EX(t)\cdot EY(t)$

$=m_X m_Y$

$R_Z(t,t+\tau)=EZ(t)Z(t+\tau)$

$=EX(t)Y(t)X(t+\tau)Y(t+\tau)$

$=EX(t)X(t+\tau)\cdot EY(t)Y(t+\tau)$

$=R_X(\tau)\cdot R_Y(\tau)$

∴ $Z(t)$是平稳过程，且$Z(t)$的自相关函数等于$X(t)$与$Y(t)$的自相关函数之积

(2) $R_P(\tau)=EP(t)P(t+\tau)$

$=E(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X)$

$=E(X(t)X(t+\tau)-m_X X(t)-m_X(t+\tau)+m_X^2)$

$=R_X(\tau)-m_X^2-m_X^2+m_X^2$

$=R_X(\tau)-m_X^2$

∴ $R_X(\tau)=R_P(\tau)+m_X^2$ 同理 $R_Y(\tau)=R_Q(\tau)+m_Y^2$

∴ $C_Z(t,t+\tau)=R_Z(t,t+\tau)-m_Z(t)m_Z(t+\tau)$

$=R_X(\tau)R_Y(\tau)-EZ(t)EZ(t+\tau)$

$=(R_P(\tau)+m_X^2)(R_Q(\tau)+m_Y^2)-m_X^2 m_Y^2$

$=(e^{-a|\tau|}+m_X^2)(e^{-b|\tau|}+m_Y^2)-m_X^2 m_Y^2$

$=e^{-(a+b)|\tau|}+m_Y^2 e^{-a|\tau|}+m_X^2 e^{-b|\tau|}$

22. 设有随机过程

$$X(t)=\cos(\eta t+\theta), -\infty<t<+\infty$$

其中，η 与 θ 为相互独立的随机变量，θ 在 $(0,2\pi)$ 上服从均匀分布，η 的密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

试证 $X(t)$ 是平稳过程，并求它的自相关函数和谱密度.

证明：$X(t)=\cos(\eta t+\theta)=\cos\eta t\cos\theta-\sin\eta t\sin\theta$.

$\because EX(t)=E(\cos\eta t\cos\theta-\sin\eta t\sin\theta)$

$=E(\cos\eta t\cos\theta)-E(\sin\eta t\sin\theta)$

$\underline{\eta与\theta独立}$ $E\cos\eta t E\cos\theta-E\sin\eta t\cdot E\sin\theta$.

$=\int_0^{2\pi}\cos\eta t\cdot\frac{1}{\pi(1+\eta^2)}d\eta\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta}_{}=0$

$-\int_0^{2\pi}\sin\eta t\cdot\frac{1}{\pi(1+\eta^2)}d\eta\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\theta\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta}_{}=0$

$=0$.

$R_X(t,t+\tau)=EX(t)X(t+\tau)$

$=E\cos(\eta t+\theta)\cos(\eta(t+\tau)+\theta)$.

$=E\frac{\cos(2\eta t+\eta\tau+\theta)+\cos\eta\tau}{2}$

$=\frac{1}{2}E\cos(2\eta t+\eta\tau+\theta)+\frac{1}{2}E\cos\eta\tau$.

$=\frac{1}{2}E\cos(2t+\tau)\eta\cos\theta-\frac{1}{2}E\sin(2t+\tau)\eta\sin\theta+\frac{1}{2}E\cos\eta\tau$.

$=0-0+\frac{1}{2}E\cos\eta\tau$

$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\tau\cdot\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$=\int_0^{+\infty}\cos x\tau\cdot\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

由11题 $a=1$

$\therefore S_X(\omega)=a^2\pi\varphi(\omega)=1^2\cdot\pi\cdot\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}=\frac{1}{1+\omega^2}$

24. 设 $s(t)$ 是一个周期为 L 的实函数，Φ 是一个在 $(0,L)$ 上均匀分布的随机变量，那么

$$X(t)=S(t+\Phi),t\in T$$

称为一个随机相位过程，试验证它是一个平稳过程.

证明：$EX(t)=ES(t+\Phi)$

$$=\int_0^L s(t+\varphi)\cdot\frac{1}{L}d\varphi$$

$$\xlongequal[\varphi=\varphi'-t]{\varphi'=t+\varphi}\frac{1}{L}\int_t^{t+L}s(\varphi')d\varphi'$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^L s(\varphi')d\varphi'$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^L s(t)dt.$$

$$\xlongequal{s(t)\text{周期为}L} c \quad (c\text{为常数})$$

$$R_X(t,t+\tau)=EX(t)X(t+\tau)=ES(t+\Phi)S(t+\tau+\Phi)$$

$$=\int_0^L s(t+\varphi)s(t+\tau+\varphi)\cdot\frac{1}{L}\cdot d\varphi.$$

$$\xlongequal[\varphi=\varphi'-t]{\varphi'=t+\varphi}\frac{1}{L}\int_t^{t+L}s(\varphi')s(\varphi'+\tau)d\varphi'$$

$$\xlongequal{s(t)\text{周期为}L}\frac{1}{L}\int_0^L s(t)s(t+\tau)dt.$$

$$=\frac{1}{L}ES(t)S(t+\tau)$$

$$=\frac{1}{L}R(\tau) \qquad \text{与}t\text{无关}$$

综上，$X(t)=S(t+\Phi)$ 是一个平稳过程.